2階線形常微分方程式が代数関数解を持つ場合のインプリメンテーション(数式処理と数学研究への応用)

渡辺, 隼郎

数理解析研究所講究録
811巻 1992年 171-182

2階線形常微分方程式が代数関数解を持つ場合のインプリメンテーション

津田塾大学　渡辺隼郎 (Shunro Watanabe)

§1

ガウスの超幾何方程式 $x(1-x)y''+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}y'-\alpha\beta y=0$ が代数関数の一般解を持つ全ての場合については文献：

Schwarz H.A., Über diejenigen Fälle in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elements darstellt, Crelle LXXV (1873) pp 292-335.

において調べられている。その代数関数解の具体的表現式は Klein など著名な数学者が多く計算したが最終的には：

Cayley A., On the Schwarzian Derivative, and the Polyhedral Functions, Transactions of Cambridge Philosophical Society vol XIII, Part I (1881) pp 5-68

によって与えられた。さてこの二つの文献で与えられた数学的結果を数式処理システムのプログラムとしてインプリメントする時の問題点を考えてみよう。そのため Schwarz の論文の中身をもう少し詳しく見る必要がある。

ガウスの超幾何方程式は 0, 1, ∞ を確定特異点とする

フックス型の方程式である．a, b, ∞ を確定特異点とし，それぞれの特性方程式の二根を λ_1, λ_2; μ_1, μ_2; ν_1, ν_2 とする方程式は $\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2+\nu_1+\nu_2=1$ という条件の下で

$$y''+\left[\frac{1-\lambda_1-\lambda_2}{x-a}+\frac{1-\mu_1-\mu_2}{x-b}\right]y'+\frac{1}{(x-a)(x-b)}\left[\frac{(a-b)\lambda_1\lambda_2}{x-a}+\frac{(b-a)\mu_1\mu_2}{x-b}+\nu_1\nu_2\right]y=0$$

となる。この方程式の一般解はリーマンのP関数

$$y=P\left\{\begin{matrix} a & b & \infty & \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 & x \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 & \end{matrix}\right\}=(x-a)^{\lambda_1}(x-b)^{\mu_1}P\left\{\begin{matrix} a & b & \infty & \\ 0 & 0 & \xi & x \\ \lambda & \mu & \nu+\xi & \end{matrix}\right\}$$

で表わされる。ここに $\lambda=\lambda_1-\lambda_2$, $\mu=\nu_1-\nu_2$, $\nu=\nu_1-\nu_2$, $\lambda+\mu+\nu+2\xi=1$ である。ガウスの超幾何方程式の解は

$$y=P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & x \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{matrix}\right\},\quad \lambda=1-\gamma,\ \mu=\gamma-\alpha-\beta,\ \nu=\alpha-\beta$$

で表わされる。さてSchwarzの論文ではガウスの超幾何方程式の一般解が初等関数または代数関数で表わされための条件を λ, μ, ν の条件として記述している．

(I)	$1/2$	$1/2$	$1/n$	(V)	$2/3$	$1/4$	$1/4$
(II)	$1/2$	$1/3$	$1/3$	(VI)	$1/2$	$1/3$	$1/5$
(III)	$2/3$	$1/3$	$1/3$	(VII)	$2/5$	$1/3$	$1/3$
(IV)	$1/2$	$1/3$	$1/4$	(VIII)	$2/3$	$1/5$	$1/5$

(IX)	1/2	2/5	1/5
(X)	3/5	1/3	1/5
(XI)	2/5	2/5	2/5
(XII)	2/3	1/3	1/5
(XIII)	4/5	1/5	1/5
(XIV)	1/2	2/5	1/3
(XV)	3/5	2/5	1/3

このうち(I)～(V)が初等関数で表わされる場合で(VI)～(XV)が代数関数で表わされる場合である。ところでここにあげた型に属さないリーマンの指標を有するが方程式の簡単な変数変換の組によって型(I)～(XV)に帰着することがないであろうか？この問題に対しては文献：

福原満洲雄，常微分方程式の解法II，岩波書店(1941)

がある。これによるとp, q, rを整数とするときリーマンの指標が$(\alpha+p, \beta+q, \gamma+r)$のものは$(\alpha, \beta, \gamma)$のものに簡単な変数変換の組によって移り得るのである。

$$\hat{y}=P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & d & x \\ a & b & c+d & \end{Bmatrix}, \quad \hat{z}=P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & d_1 & x \\ a_1 & b_1 & c_1+d_1 & \end{Bmatrix}$$

$a+b+c+2d=1$, $a_1+b_1+c_1+2d_1=1$ とする。ここで $a=a_1+p$, $b=b_1+q$, $c=c_1+r$ で $p\geqq q\geqq r\geqq 0$, p, q, r：整数で $p+q+r$ は偶数とする。このとき $m=(p+q+r)/2$, $n=(p-q+r)/2$ は正の整数で，次の関係式が成り立つ：

(7) $\hat{z} = (x-1)^{b-r-m+n}\dfrac{d^n}{dx^n}\left[(x-1)^{-b+r+m}\dfrac{d^m}{dx^m}\left\{x^{-d-r}\dfrac{d^r}{dt^r}(x^d\hat{y})\right\}\right], t=\dfrac{1}{x}$

この変換をどのように実現するかを見て行こう。

1) $p \geqq 0$, $q \geqq 0$, $r \geqq 0$ が成り立たないとき

イ) $p<0$ とする $a=a_1+p$, $-a=-a_1-p$,

$$x^{-a}\hat{y}=P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & d+a & x \\ -a & b & c+d+a & \end{Bmatrix}, \quad x^{-a_1}\hat{z}=P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & d_1+a_1 & x \\ -a_1 & b_1 & c_1+d_1+a_1 & \end{Bmatrix}$$

だから $\hat{y}$ と $\hat{z}$ のかわりに $x^{-a}\hat{y}$ と $x^{-a_1}\hat{z}$ を考えればよい。

ロ) $q<0$　ハ) $r<0$　の場合も同様である。

2) $p \geqq 0$, $q \geqq 0$, $r \geqq 0$ が成り立つが $p \geqq q \geqq r \geqq 0$ が成り立たないとき。

イ) $r > \max(p, q)$ のとき, $t=1/x$ とする。

$$t^{-d}\hat{y}_t=P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & d & t \\ c & b & a+d & \end{Bmatrix}, \quad t^{-d_1}\hat{z}_t=P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & d_1 & t \\ c_1 & b_1 & a_1+d_1 & \end{Bmatrix}$$

だから $\hat{y}$ と $\hat{z}$ のかわりに $t^{-d}\hat{y}_t$ と $t^{-d_1}\hat{z}_t$ を考えると $p \geqq q$, $p \geqq r$ となる。

ロ) $p \geqq r > q > 0$ のとき $t=x/(x-1)$ なる変数変換を行うと 1 と ∞ が入れ替わるので $p \geqq q \geqq r \geqq 0$ の場合となる。$\hat{y}$ と $\hat{z}$ のかわりに $(t-1)^{-d}\hat{y}_t$ と $(t-1)^{-d_1}\hat{z}_t$ を考える。

$$(t-1)^{-d}\hat{y}_t = P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & d & t \\ a & c & b+d & \end{Bmatrix}, \quad (t-1)^{-d_1}\hat{z}_t = P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & d_1 & t \\ a_1 & c_1 & b_1+d_1 & \end{Bmatrix}$$

以上で条件 $p \geqq q \geqq r \geqq 0$ が満たされるようになった。
今度は変換(T)をどのように実現するかを見よう。

$$\hat{z} = P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & d_1 & x \\ a_1 & b_1 & c_1+d_1 & \end{Bmatrix} = (x-1)^{b-r-m+n}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(x-1)^{-b+r+m}\frac{d^m}{dx^m}u\right\},$$

$$u = P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & d+r & x \\ a & b-r & c+d & \end{Bmatrix} = x^{-d-r}P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ d+r & 0 & 0 & x \\ a+d+r & b-r & c-r & \end{Bmatrix}$$

$$= P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & d+r & t \\ c-r & b-r & a+d+r & \end{Bmatrix} = \frac{d^r}{dt^r}w, \quad w = P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & d & t \\ c & b & a+d & \end{Bmatrix}$$

$$= P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ d & 0 & 0 & x \\ a+d & b & c & \end{Bmatrix} = x^d\hat{y}, \quad \hat{y} = P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & d & t \\ a & b & c+d & \end{Bmatrix}$$

例1.

$$z'' - \frac{2x-3}{2x^2-2x}z' - \frac{c^2-4}{4x^2-4x}z = 0, \qquad z = P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{c+2}{2} & x \\ 0 & 0 & \frac{c-2}{2} & \end{Bmatrix}$$

$$y'' + \frac{2x-1}{2x^2-2x}y' - \frac{c^2}{4x^2-4x}y = 0, \quad y = P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{c}{2} & x \\ 0 & 0 & \frac{c}{2} & \end{array}\right\}$$

zとyの間では$\frac{1}{2} = \frac{5}{2} + p$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + q$なので$p = -2$, $q=0$である。$z = x^{\frac{5}{2}}v$, $y = \sqrt{x}\,u$とすると

$$v = P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{c-3}{2} & x \\ 0 & 0 & \frac{c+3}{2} & \end{array}\right\}, \quad u = P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{c-1}{2} & x \\ 0 & 0 & \frac{c+1}{2} & \end{array}\right\}$$

vとuの間では$-\frac{1}{2} = -\frac{5}{2} + p$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + q$なので$p = 2$, $q = 0$となる。そしてvとuの間には次の関係がある。

$$v = (x-1)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left[(x-1)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}u\right], \quad y = \frac{k_1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^c} + \frac{k_2}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})^c}$$

この例は初等関数に帰着する場合であった。(型I)

§2

2階線形常微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$ を考える。その一次独立な2つの解をy_1とy_2としその比$s = y_2/y_1$を考える。$\varphi = s''/s' = \frac{d}{dx}\left(\log\frac{ds}{dx}\right)$とする。

$$\{s, x\} \equiv \frac{d\varphi}{dx} - \frac{1}{2}\varphi^2 \equiv \frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 = -\frac{1}{2}X$$

ここに$X = p^2 + 2\frac{dp}{dx} - 4q$を Schwarz の導関数という。ガウスの超幾何方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\frac{dy}{dx}-\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}y=0$$

の場合には $\lambda^2=(1-\gamma)^2$, $\mu^2=(\alpha-\beta)^2$, $\nu^2=(\gamma-\alpha-\beta)^2$ として

$$-\frac{1}{2}X=\frac{1}{2}\left[\frac{1-\lambda^2}{x^2}+\frac{1-\nu^2}{(x-1)^2}+\frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{x(x-1)}\right]$$ となる。

定理 $\{s,x\}=-\frac{1}{2}X$ の解 $s(x)$ は x 平面の上半平面を s 平面の円弧三角形ABCに写す。ここに x 平面上の 0, 1, ∞ はそれぞれ s 平面上のA, B, Cに写り，A, B, Cにおける角は $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ である。

$\{s,x\}=-\frac{1}{2}X$ の解 $s(x)$ を線分 $\infty 0$ から下半平面に解析接続すると鏡像の原理によって $s(\bar{x})=\overline{s(x)}$ である。したがって新しい $s(x)$ は下半平面を元の三角形をCAの側から鏡像の原理によって得られた新しい三角形に写す。このようにして解析接続により次々と新しい三角形を得たとき，三角形が一重で平面全体をおおうならば $s(x)$ は初等関数であり，有限回で平面全体をおおうなら代数関数となる。

一方 $s=y_1/y_2$ なので s が求まれば，関係式

$$y_2=\left[\frac{1}{s'}x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\right]^{\frac{1}{2}},\quad y_1=s\cdot y_2$$

により y_1 と y_2 を求めることができる。三角形の角度が λ, μ, ν であることから，s 平面を複素球面にしてみれば

分るように $s(x)$ が代数関数でなければならない条件が，λ，μ，ν が適当な有理数であるという形で表わされる。これが型I〜型XVというSchwarzの表であった。同じようにして $s(x)$ が楕円関数で表わされる条件を考えることができる。

今度は代数関数解の具体的表現を求めてみよう。

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0,\ X=p^2+2\frac{dp}{dx}-4q,\ s=\frac{y_2}{y_1},\ \{s,x\}=-\frac{1}{2}X,$$

$$\frac{d^2v}{dz^2}+P\frac{dv}{dz}+Qv=0,\ Z=P^2+2\frac{dP}{dz}-4Q,\ s=\frac{v_2}{v_1},\ \{s,z\}=-\frac{1}{2}Z,$$

この2つの方程式がガウスの超幾何方程式のとき

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\frac{dy}{dx}-\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}y=0\ ;\ \frac{d^2v}{dz^2}+\frac{\gamma'-(\alpha'+\beta'+1)z}{z(1-z)}\frac{dv}{dz}-\frac{\alpha'\beta'}{z(1-z)}v=0$$

$$\lambda^2=(1-\gamma)^2,\ a=\frac{1}{2}(1-\lambda^2)\quad;\quad\lambda'^2=(1-\gamma')^2,\ a_1=\frac{1}{2}(1-\lambda'^2)$$

$$\mu^2=(\alpha-\beta)^2,\ b=\frac{1}{2}(1-\mu^2)\quad;\quad\mu'^2=(\alpha'-\beta')^2,\ b_1=\frac{1}{2}(1-\mu'^2)$$

$$\nu^2=(\gamma-\alpha-\beta)^2,\ c=\frac{1}{2}(1-\nu^2)\quad;\quad\nu'^2=(\gamma'-\alpha'-\beta')^2,\ c_1=\frac{1}{2}(1-\nu'^2)$$

$$\{s,x\}=\frac{a}{x^2}+\frac{c}{(x-1)^2}+\frac{-a+b-c}{x(x-1)}=(a,b,c\,\therefore)\left(\frac{1}{x},\frac{1}{x-\infty},\frac{1}{x-1}\right)^2$$

$$\{s,z\}=\frac{a_1}{z^2}+\frac{c_1}{(z-1)^2}+\frac{-a_1+b_1-c_1}{z(z-1)}=(a_1,b_1,c_1\,\therefore)\left(\frac{1}{z},\frac{1}{z-\infty},\frac{1}{z-1}\right)^2$$

ここで

$$(a,b,c\,\therefore)\left(\frac{1}{x-a},\frac{1}{x-b},\frac{1}{x-c}\right)^2=-\frac{(a-c)(c-a)(a-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)}\left[\frac{a}{(b-c)(x-a)}+\frac{b}{(c-a)(x-b)}+\frac{c}{(a-b)(x-c)}\right]$$

$$\{s,x\}=(a,b,c\cdots)\left(\frac{1}{x-a},\frac{1}{x-b},\frac{1}{x-c}\right)^2,\ \{s,z\}=(a_1,b_1,c_1\cdots)\left(\frac{1}{z-a_1},\frac{1}{z-b_1},\frac{1}{z-c_1}\right)$$

$$\{z,x\}=-\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\{x,z\},\quad \{x,z\}+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2\{s,x\}=\{s,z\}$$

$$\{x,z\}+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2\{s,x\}=(a_1,b_1,c_1\cdots)\left(\frac{1}{z-a_1},\frac{1}{z-b_1},\frac{1}{z-c_1}\right)^2$$

代数関数は次の表で与えられる. $f=b-c,\ g=c-a,\ h=a-b$

1	$f\cdot(x-a):g\cdot(x-b):h\cdot(x-c)$	$=P(s):Q(s):R(s)$	(1)
I	$f\cdot(x-a):g\cdot(x-b):h(x-c)$	$=P(s):Q(s):R(s)$	(2)
II	$f\cdot(x-a):g\cdot(x-b):h(x-c)$	$=P(s):Q(s):R(s)$	(3)
III	$4x:-(x+1)^2:(x-1)^2$	$=P(s):Q(s):R(s)$	(4)
IV	$f\cdot(x-a):g\cdot(x-b):h\cdot(x-c)$	$=P(s):Q(s):R(s)$	(4)
V	$(x-1)^2:-(x+1)^2:4x$	$=P(s):Q(s):R(s)$	(4)
VI	$f\cdot(x-a):g(x-b):h(x-c)$	$=P(s):Q(s):R(s)$	(5)
VII	$4x:-(x+1)^2:(x-1)^2$	$=P(s):Q(s):R(s)$	(5)
VIII	$(x-1)^2:-(x+1)^2:4x$	$=P(s):Q(s):R(s)$	(5)
IX	$P(x):Q(x):R(x)$ (IX)	$=P(s):Q(s):R(s)$	(5)
X	$P(x):Q(x):R(x)$ (X)	$=P(s):Q(s):R(s)$	(5)
XI	$P(x):Q(x):R(x)$ (XI)	$=P(s):Q(s):R(s)$	(5)
XII	$P(x):Q(x):R(x)$ (XII)	$=P(s):Q(s):R(s)$	(5)
XIII	$P(x):Q(x):R(x)$ (XIII)	$=P(s):Q(s):R(s)$	(5)
XIV	$P(x):Q(x):R(x)$ (XIV)	$=P(s):Q(s):R(s)$	(5)
XV	$P(x):Q(x):R(x)$ (XV)	$=P(s):Q(s):R(s)$	(5)

	P	Q	R
1	z^n	$-1(1-\frac{z}{\infty})^n$	$-z^n+1$
2	$4z^n(1-\frac{z}{\infty})^n$	$-(z^n+1)^2$	$(z^n-1)^2$
3	$(z^4+2\sqrt{-3}\,z^2+1)^3$	$-12\sqrt{-3}\,z^2(z^4-1)^2(1-\frac{z}{\infty})^2$	$-(z^4-2\sqrt{-3}\,z^2+1)^3$
4	$(z^8+14z^4+1)^3$	$-(z^{12}-33z^8-33z^4+1)^2$	$-108(z^5-z)^4(1-\frac{z}{\infty})^4$
5	$(z^{20}-228z^{15}+494z^{10}+228z^5+1)^3$	$-(z^{30}-522z^{25}-10005z^{20}-10005z^{10}+522z^5+1)^2$	$-1728(z^{11}+11z^6-z)^5(1-\frac{z}{\infty})^5$
III, V, VII, VIII	$4z(1-\frac{z}{\infty})$	$-(z+1)^2$	$(z-1)^2$
IX	$(z-4)^3$	$-(z-1)(z+8)^2$	$27z^2(1-\frac{z}{\infty})$
X	$z(z+8)^3$	$-(z^2-20z-8)^2$	$-64(z-1)^3(1-\frac{z}{\infty})$
XI	$4(z^2-z+1)^3$	$-(2z^3-3z^2-3z+2)$	$-27z^2(z-1)^2(1-\frac{z}{\infty})^2$
XII	$z^3(z+5)^2(z+8)$	$-(z^3+9z^2+12z-8)^2$	$-64(3z-1)(1-\frac{z}{\infty})^5$
XIII	$(z^2+14z+1)^3$	$-(z^3-33z^2-33z+1)^2$	$-108z(z-1)^4$
XIV	$(64z+189)(64z^2+133z+49)^3$	$-z(4096z^3+18816z^2+25725z+12005)^2$	$-27\cdot 7^7(z+1)^2(1-\frac{z}{\infty})^5$
XV	$-(5z-27)(125z^3-25z^2-265z-243)^3$	$-(-3125z^5+9375z^4+18750z^3+8750z^2+30750z+19683)^3$	$+1382400000z^3(z+1)^2(1-\frac{z}{\infty})^5$

III, V, VII, VIII, IX, X, XI, XIII は Brioschi が計算した。

XII, XIV は Klein が計算した。

XV は Cayley が計算した。

	(a, b, c)				$(ap), (bq), (cr)$ の計算
1	$\frac{1}{2}(1-m^{-2})$	$\frac{1}{2}(1-m^{-2})$	0		
2	$\frac{1}{2}(1-m^{-2})$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	I	
3	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{9}$	II	
4	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{15}{32}$	IV	
5	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{25}$	VI	
III	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{9}$		$\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{18} \cdot\!:\right)\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{z-x}, \frac{1}{z-1}\right)^2$
V	$\frac{15}{32}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{9}$		$\left(\frac{15}{32}, \frac{15}{32}, \frac{5}{18} \cdot\!:\right)\left(" \quad " \quad " \right)^2$
VII	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{25}$		$\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{21}{50} \cdot\!:\right)\left(" \quad " \quad " \right)^2$
VIII	$\frac{12}{25}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{9}$		$\left(\frac{12}{25}, \frac{12}{25}, \frac{5}{18} \cdot\!:\right)\left(" \quad " \quad " \right)^2$
IX	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{25}$		$\left(\frac{3}{8}, \frac{12}{25}, \frac{21}{50} \cdot\!:\right)\left(\frac{1}{z-1}, \frac{1}{z-x}, \frac{1}{z}\right)^2$
X	"	"	"		$\left(\frac{4}{9}, \frac{12}{25}, \frac{8}{25} \cdot\!:\right)\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{z-x}, \frac{1}{z-1}\right)^2$
XI	"	"	"		$\left(\frac{21}{50}, \frac{21}{50}, \frac{21}{50} \cdot\!:\right)\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{z-x}, \frac{1}{z-1}\right)^2$
XII	"	"	"		$\left(\frac{4}{9}, \frac{5}{18}, \frac{12}{25} \cdot\!:\right)\left(\frac{1}{z+8}, \frac{1}{z+5}, \frac{1}{z-\frac{1}{3}}\right)^2$
XIII	"	"	"		$\left(\frac{12}{25}, \frac{12}{25}, \frac{9}{50} \cdot\!:\right)\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{z-x}, \frac{1}{z-1}\right)^2$
XIV	"	"	"		$\left(\frac{4}{9}, \frac{3}{8}, \frac{21}{50} \cdot\!:\right)\left(\frac{1}{z+\frac{180}{64}}, \frac{1}{z}, \frac{1}{z+1}\right)^2$
XV	"	"	"		$\left(\frac{4}{9}, \frac{21}{50}, \frac{8}{25} \cdot\!:\right)\left(\frac{1}{z-\frac{27}{5}}, \frac{1}{z+1}, \frac{1}{z}\right)^2$

例2.

$$y'' + \frac{16x-10}{15x(x-1)} y' - \frac{2}{225x(x-1)} y = 0, \quad y = P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & \frac{2}{15} & x \\ 0 & 0 & -\frac{1}{15} & \end{Bmatrix}$$

この場合2根の差の組は $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ なので型Xである。$(a_1, b_1, c_1) = \left(\frac{4}{9}, \frac{12}{25}, \frac{8}{25}\right)$, $(a_1, b_1, c_1) = (0, \infty, 1)$ である。$\frac{4}{9} = \frac{1}{2}(1-\lambda'^2)$ より $\lambda' = \frac{1}{3}$, $\frac{12}{25} = (1-\mu'^2)$ より $\mu' = \frac{1}{5}$, $\frac{8}{25} = \frac{1}{2}(1-\nu'^2)$ より $\nu' = \frac{3}{5}$ だから丁度このP関数と一致する。$\gamma = \frac{2}{3}$, $\gamma-\alpha-\beta = \frac{3}{5}$ と $y_2 = \left[s'^{-1} x^{-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\right]^{\frac{1}{2}}$ より

$$y_2 = x^{-\frac{1}{5}} (1-x)^{-\frac{1}{5}} s'^{-\frac{1}{2}}, \quad y_1 = s \cdot y_2$$

であって s は次の方程式をみたす代数関数である。

$$x(x+8)^3 : -(x^2-20x-8)^2 : -64(x-1)^3\left(1-\frac{x}{\infty}\right)$$
$$= (s^{20}-228s^{15}+494s^{10}+228s^5+1)^3 :$$
$$-(s^{30}-522s^{25}-10005s^{20}+0\cdot s^{15}-10005s^{10}+522s^5+1)^2 :$$
$$-1728(s^{11}+11s^6-s)^5\left(1-\frac{s}{\infty}\right)^5$$